EXAMEN DE CALIFICACION
ÁLGEBRA

Enero 2007

Haga CINCO de los siguientes siete problemas

1. Sean H y K subgrupos de índice finito de un grupo G. Demuestre que $H \cap K$ tiene índice finito en G.

2. Sea G un grupo de orden qp^2, con p y q primos. Demuestre que G no es simple.

3. Sean R y S anillos conmutativos con unidad. Demuestre que todo ideal de $R \times S$ es de la forma
$$I \times J = \{(a, b) \in R \times S \,|\, a \in I,\, b \in J\},$$
donde I es un ideal de R y J es un ideal de S.

4. Sea A un anillo conmutativo con unidad y sean I y J ideales de A tales que $I + J = A$. Demuestre que $A/(IJ)$ es isomorfo a $A/I \times A/J$.

5. Describa todas las posibles clases de semejanza sobre $\mathbb{C}$ de una matriz T de tamaño 3×3, con coeficientes en $\mathbb{C}$, que satisface $T^3 = T$.

6. Sea p un primo y $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de p elementos. Demuestre que para todo entero positivo n existe un polinomio $f_n \in \mathbb{F}_p[x]$, con f_n irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$ y de grado n.

7. Describa todos los subcuerpos del cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^4 - 4x^2 + 2$.

EXAMEN DE CALIFICACION
ÁLGEBRA

Agosto 2007

Haga CINCO de los siguientes problemas.

1. Sea G un grupo finito y $H \subset G$ un subgrupo. Demuestre que
$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

2. Sea $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con coeficientes complejos, y sea $H \subset G$ el subgrupo de matrices triangular superior, es decir de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ con $ad \neq 0$. Demuestre que
$$G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

3. Sea G un grupo finito, $Z = Z(G)$ el centro de G, y $K \lhd G$ un subgrupo normal de G. Sea p un número primo tal que $p \,\big|\, |Z|$ (es decir, p divide el orden de Z) pero $p \not\big|\, |Z \cap K|$. Demuestre que $p \,\big|\, [G : K]$.

4. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio de la forma
$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
y sea p un primo tal que $p \,\big|\, a_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pero $p^3 \not\big|\, a_0$. Demuestre que si tenemos $f(x) = h_1(x)h_2(x)h_3(x)$ con $h_i \in \mathbb{Z}[x]$, entonces al menos un h_i es constante.

5. Demuestre que el anillo $A = \mathbb{Z}[x]/(2x)$ no es isomorfo (como anillo con unidad) a un producto de anillos $A_1 \times A_2$, donde los anillos A_1 y A_2 tienen más de un elemento.

6. Determine cuántos polinomios distintos de cada grado tiene la factorización en irreducibles en $\mathbb{F}_2[x]$ del polinomio $x^{256} + x$ (aquí $\mathbb{F}_2$ denota el cuerpo de dos elementos).

7. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y sea $\gamma \in R$, $\gamma \neq \pm 1$, $\gamma \neq 0$, un elemento tal que para todo $a, b \in R$, si $\gamma \,\big|\, (ab)$ entonces $\gamma \,\big|\, a$ ó $\gamma \,\big|\, b$ (donde el símbolo $\big|$ se lee "divide en R"). Demuestre que el ideal $(\gamma) = \gamma R$ es un ideal maximal de R.

8. Sea $f = x^2 + x^{-2} \in \mathbb{C}(x)$ donde $\mathbb{C}(x)$ es el cuerpo de funciones racionales sobre $\mathbb{C}$. Sea $k = \mathbb{C}(f) \subset \mathbb{C}(x)$. Determine si la extensión $\mathbb{C}(x)/k$ es galoisiana.

EXAMEN DE CALIFICACION
ÁLGEBRA

Agosto 2008

Haga CINCO de los siguientes siete problemas

1. Considere primos p y q distintos. Demuestre que si un grupo G tiene orden p^2q^2, entonces G no es simple.

2. Sea $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ un conjunto con 6 elementos. Calcule cuantas funciones $\pi : X \times X \to X$ existen que dan a X una estructura de grupo en que A es el elemento neutro.

3. Una matriz se dice de permutación si tiene un único 1 en cada fila y columna y tiene 0 en las posiciones restantes. Demuestre que para toda matriz de permutación A se tiene $A^{-1} = A^t$, donde A^t denota la matriz transpuesta.

4. Considere los subanillos C y D de $\mathbb{Q}$ definidos como
$$C = \Big\{\frac{a}{2^n}\Big|\, a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\Big\}, \qquad D = \Big\{\frac{a}{2^n 3^m}\Big|\, a \in \mathbb{Z},\, n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0,\, m \geq 0\Big\}.$$
Demuestre el isomorfismo de anillos
$$\frac{C[x]}{(9x^2-1)} \cong D \times D.$$

5. Suponga que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y que $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $L = T^2 + \alpha T + \beta I$ es nilpotente (es decir $L^M = 0$ para algún $M \in \mathbb{N}$), donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha^2 < 4\beta$. Demuestre que la dimensión de V es par y que $L^{\dim V/2} = 0$.

6. Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $E = F(T)$ el cuerpo de funciones racionales sobre F (es decir, T es una indeterminada) y suponga que $\sigma : E \to E$ es un automorfismo de cuerpo que es la identidad sobre F.

   (a) Demuestre que $\sigma(T) = \dfrac{aT+b}{cT+d}$ para ciertos $a, b, c, d \in F$ con $ad - bc \neq 0$.

   (b) Si $a, b, c, d \in F$ con $ad - bc \neq 0$, demuestre que existe un automorfismo de cuerpo $\sigma : E \to E$ que es la identidad sobre F tal que $\sigma(T) = \dfrac{aT+b}{cT+d}$.

7. Sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ y sea $L \subset \mathbb{C}$ la clausura galoisiana de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$. Es decir, L es el mínimo subcuerpo de $\mathbb{C}$ galoisiano sobre $\mathbb{Q}$ y tal que $\alpha \in L$. Encuentre $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Demuestre su respuesta.

EXAMEN DE CALIFICACION
ÁLGEBRA

23 de septiembre, 2009

Conteste al menos CINCO de los siguientes ocho problemas.

1. Sea G un grupo finito y K un subgrupo normal de G. Para q primo, denote por $\mathrm{Syl}_q(G)$ $\big($respectivamente, $\mathrm{Syl}_q(K)\big)$ el conjunto de los q-subgrupos de Sylow de G (respectivamente, K). Demuestre que para todo primo q que divide al orden de K se tiene
$$\mathrm{Syl}_q(K) = \left\{ P \cap K \,\middle|\, P \in \mathrm{Syl}_q(G) \right\},$$
y que la cardinalidad de $\mathrm{Syl}_q(K)$ divide a la cardinalidad de $\mathrm{Syl}_q(G)$.

2. Sea $g \in G$ un elemento de un grupo G, sea H un subgrupo de G y sea $T = gH$ una clase lateral izquierda de H.

   (a) Demuestre que existe un subgrupo K de G tal que T es clase lateral derecha de K.

   (b) Sean $g_1, g_2 \in G$. Demuestre que $g_1 H g_2$ es un subgrupo de G si y sólo si $g_2 \in H g_1^{-1}$.

3. Sean $A \neq B$ matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K que satisfacen
$$A^3 = B^3, \qquad A^2 B = B^2 A.$$
Demuestre que $A^2 + B^2$ no es invertible.

4. (a) Sean α y β números complejos, trascendentes sobre $\mathbb{Q}$. Demuestre que $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ no pueden ser ambos algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Demuestre que existen números complejos α, β, y γ trascendentes sobre $\mathbb{Q}$, tales que $\alpha + \beta + \gamma$ y $\alpha\beta\gamma$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.

5. Sean f y g elementos del anillo $\mathbb{Q}[x,y]$ de polinomios en dos variables. Demuestre que el anillo (y $\mathbb{Q}$-espacio vectorial) cociente

$$\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{(f,g)}$$

tiene dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$ si y sólo si f y g no tienen divisores comunes. Aquí (f,g) denota el ideal de $\mathbb{Q}[x,y]$ generado por f y g.

6. Sea $f \in \mathbb{F}_{7^r}(x)$ una función racional con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}_{7^r}$ con 7^r elementos que satisface

$$f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) = x, \qquad (*)$$

donde $\circ$ denota la composición de funciones racionales.

   (a) Demuestre que existen A, B, C y D en $\mathbb{F}_{7^r}$ tales que

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}.$$

   (b) Encuentre el menor valor de r para el cual se cumple $(*)$ con algún $f \neq$ Identidad.

7. Sea A un anillo conmutativo con unidad $1 \in A$, y sea $e \in A$ tal que $e(1-e)$ es nilpotente, pero ni e ni $1-e$ son nilpotentes. Demuestre que existen anillos no triviales B y C tales que A es isomorfo al producto directo $A \cong B \times C$.

8. Sea $g(x)$ un factor irreducible de $1 + x^{114} + x^{228}$ en $\mathbb{F}_7[x]$. Encuentre todos los posibles valores de $\deg(g)$. Demuestre su respuesta.

EXAMEN DE CALIFICACION
ÁLGEBRA

17 de Enero de 2011

Conteste cinco preguntas, UNA de cada sección.

Sección I: Algebra lineal.

I.1: Calcule cuántos espacios vectoriales de dimensión 3 están contenidos en un espacio vectorial de dimensión 7 sobre el cuerpo de cinco elementos $\mathbb{F}_5$.

I.2: A es una matriz de tamaño 3×3 con coeficientes en $\mathbb{C}$ que satisface la ecuación

$$A^3 - 4A^2 + A = 5I_3,$$

donde I_3 es la matriz identidad de tamaño 3×3. Si B también es una matriz de tamaño 3×3 con coeficientes en $\mathbb{C}$ que satisface la ecuación

$$B^3 - 4B^2 + B = 5I_3,$$

¿es cierto que $B = CAC^{-1}$ para alguna matriz C invertible de tamaño 3×3 con coeficientes en $\mathbb{C}$? Demuestre su respuesta.

Sección II: Teoría de grupos.

II.1: Sea G un grupo de orden $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$. Demuestre que G no se inyecta en A_7.

II.2: Sea p un número primo impar. Sea $\Gamma \subset S_p$ un subgrupo del grupo simétrico S_p tal que Γ actúa transitivamente sobre $\{1, \ldots, p\}$. Demuestre que el número de elementos de orden 2 en G es divisible por p.
SUGERENCIA. Considere la acción por conjugación sobre el conjunto de elementos de orden 2 en G.

Sección III: Teoría de anillos.

III.1: Determine si existe un epimorfismo de anillos

$$\phi : \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2) \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]/(x^2,xy)$$

cuya restricción a $\mathbb{C}$ sea la identidad. Demuestre su respuesta.

III.2: Suponga que R es un dominio de integridad que tiene un subanillo F que es cuerpo (R y F tienen el mismo 1). Suponga además que R (naturalmente un F-espacio vectorial) es de dimensión finita sobre F. Demuestre que R es cuerpo.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

IV.1: Sea α un número complejo algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Sea $f(x)$ el polinomio mónico irreducible de α en $\mathbb{Q}[x]$. Demuestre que α es un cuadrado en $\mathbb{Q}[\alpha]$ si y sólo si $f(x^2)$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$.

IV.2: Calcule el grado del cuerpo de descomposición de $X^6 - 3$ sobre el cuerpo base

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$
2. El cuerpo de 5 elementos $\mathbb{F}_5$.

Sección V: Problemas mixtos.

V.1: Sea p un primo impar. ¿Cuantos anillos (conmutativos, con 1) existen con p^2 elementos, salvo isomorfismos?

V.2: Sea K un cuerpo de característica 0 y sea L/K una extensión de grado p primo. Probar que existen cuerpos $E \subset F$ algebraicos sobre K tales que F/E es una extensión Galoisiana de grado p.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

7 de Enero de 2013

Conteste CINCO preguntas, incluyendo al menos UNA de cada sección.

Sección I: Algebra lineal.

1. Sea M una matriz real de tamaño $n \times n$ tal que existe una matriz real invertible P que satisface $PMP^t = I_n$, la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Demuestre que todos los valores propios de M son reales y positivos.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean $T : V \to V$ y $S : V \to V$ funciones K-lineales con las tres siguientes propiedades:

   - S es inyectiva,
   - Existe $v_0 \in V,\ v_0 \neq 0,\ T(v_0) = 0$,
   - $TS - ST = S$.

   (a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $S^n(v_0)$ es un vector propio de T.

   (b) Demuestre que si K tiene característica 0, entonces V es de dimensión infinita.

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea S_p el grupo simétrico en p símbolos. ¿Cuántos subgrupos de orden p hay en S_p? Demuestre su respuesta.

2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Demuestre que existe un grupo *no abeliano* de orden p^3.

Sección III: Teoría de anillos.

1. Sea A un anillo finito con unidad. Sea $x \in A$ tal que para todo $a \in A$ se cumple que $1 + ax$ tiene inverso multiplicativo (por ambos lados). Demuestre que $x^n = 0$ para algún n.

   Nota. A no es necesariamente conmutativo.

2. Demuestre que todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}[X]$ es de la forma

$$\mathfrak{m} = \big(p, f(X)\big) = p\mathbb{Z}[X] + f(X)\mathbb{Z}[X],$$

   donde $p \in \mathbb{N}$ es primo y $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible módulo p.

   Sugerencia. Piense en $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. ¿Puede el cuerpo de descomposición K sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ser escrito como $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, para ciertos elementos $a, b \in \mathbb{Q}$? Demuestre su respuesta.

2. Sea F un cuerpo y $g(X) \in F[X]$ un polinomio tal que $1 + g(X)^2$ tiene un factor $h(X) \in F[X]$, irreducible en $F[X]$ y de grado impar. Demuestre que -1 es un cuadrado en F.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

13 de Enero de 2014

Conteste CINCO preguntas, incluyendo al menos UNA de cada sección.

Sección I: Algebra lineal.

1. Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial (sobre algún cuerpo) y sea $T : V \to V$ una función lineal sin subespacios invariantes, es decir, si $0 \subsetneq W \subsetneq V$ es un subespacio no trivial ni total de V, entonces $T(W) \not\subset W$. Demuestre que el conjunto de funciones lineales $g : V \to V$ que satisfacen
$$T\big(g(v)\big) = g\big(T(v)\big) \qquad\qquad (\forall\ v \in V)$$
es un anillo de división.

2. Sea A la matriz
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
con coeficientes en el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$. ¿Para qué primos p es A diagonalizable sobre $\mathbb{F}_p$? Asegúrese de responder esto específicamente para $p = 2$, 3, 5 y 7.

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea N un subgrupo normal del grupo G. Diremos que un subgrupo H de G es un complemento de N si $NH = G$ y $N \cap H = \{e\}$, el grupo trivial.
   (a) Demuestre que los complementos de N (si existen) son isomorfos.
   (b) Suponga que el centro de N es el grupo trivial y que todo automorfismo de N está dado por conjugación por algún elemento de N. Demuestre que existe un único subgrupo $H \subset G$, el cual es normal y complemento de N.

2. Sea G un grupo infinito con la propiedad que para todo par de subgrupos K y H de G se cumple que $K \subset H$ o bien $H \subset K$. Demuestre que existe un número primo p tal que G es isomorfo al grupo $\Gamma_p \subset \mathbb{C}^*$ de raíces complejas de la unidad cuyo orden es potencia de p. Es decir

$$G \cong \Gamma_p := \left\{ z \in \mathbb{C}^* \middle| z^{p^m} = 1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sección III: Teoría de anillos.

1. Sea $\zeta := \exp(2\pi i/p) \in \mathbb{C}$, con p un primo, $p \geq 5$. Demuestre

   que $\zeta^2 + \zeta + 1$ es una unidad del anillo $\mathbb{Z}[\zeta]$.

2. Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $I \subset A$ un ideal primo de A. Sea $A[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en A, y sea

$$I(x) := \left\{ f(x) = \sum_j a_j x^j \in A[x] \middle| a_j \in I \ \forall j \right\}.$$

   Demuestre que $I[x]$ es un ideal primo de $A[x]$.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Sea F un cuerpo de característica $p \neq 0$ y sea L/F una extensión de cuerpos. Suponga que $\alpha \in L$ satisface $\alpha^p \in F$. Demuestre que el grado satisface
   $[F(\alpha) : F] = 1$, o bien $[F(\alpha) : F] = p$.

2. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible y suponga que existen dos raíces complejas distintas α y β de f tales que $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$.

   (a) Demuestre que $\alpha = -\beta$.

   (b) Demuestre que si $\gamma \in \mathbb{C}$ es cualquier raíz de f, entonces $-\gamma$ también es raíz de f.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

12 de Enero de 2015

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea A una matriz de tamaño 101×101, con coeficientes en el cuerpo finito $\mathbb{F}_2$, tal que $\operatorname{tr}(A^n) = 0$ para todo entero positivo n. Demuestre que $\ker(A^n)$ tiene dimensión impar para todo n suficientemente grande.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$ (sobre algún cuerpo). Sea $\phi : V \to V$ una función lineal para la cual existe $v \in V$ tal que $\{v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{n-1}(v)\}$ es base de V.

   Suponga que $U \subset V$ es un subespacio vectorial, $U \neq \{0\}$, tal que $\phi(U) \subset U$. Demuestre que existe $u \in U$ y un entero positivo m tal que $\{u, \phi(u), \phi^2(u), \ldots, \phi^{m-1}(u)\}$ es base de U.

   NOTA. Aquí, por supuesto, $\phi^j(v) = \phi\big(\phi^{j-1}(v)\big)$ si $j \geq 2$, y $\phi^1(v) = \phi(v)$

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea G un grupo y sea $F \subset G$ el subconjunto de elementos de G que nunca ayudan a generar G. Es decir

$$F = \big\{x \in G \,\big|\, \forall S \subset G,\ \langle S, x\rangle = G \implies \langle S\rangle = G\big\}.$$

   Demuestre que:

   (a) F es un subgrupo de G.

   (b) F es normal en G.

   (c) Si G es finito, entonces $F = \bigcap_M M$, donde $M \subsetneq G$ recorre todos los subgrupos propios de G, maximales con respecto a la inclusión.

   (d) Si G es un p-grupo finito, con p un número primo, entonces cada elemento no trivial de G/F es de orden p.

2. Calcule cuantos grupos no isomorfos existen de orden 88 que contienen al menos un elemento de orden 8.

Sección III: Teoría de anillos.

1. Determine para qué valores del entero positivo n y del primo p existe un homomorfismo epiyectivo de anillos
$$\phi : \mathbb{Z}[X] \to \underbrace{\mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p}_{n \text{ veces}}.$$

2. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[X]$ y su ideal $I = (15, X^2 + 2)$. Demuestre que existe sólo un número finito de ideales maximales de R que contienen a I y determine cuántos son.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Denotemos por $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos y su clausura algebraica por $\overline{\mathbb{F}}_q$. Sea
$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{q_n} \subset \overline{\mathbb{F}}_3, \quad \text{donde } q_n = 3^{2^n}.$$
Demuestre que si $F \subsetneq K$ es un subcuerpo propio de K, entonces F es un cuerpo finito.

2. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio mónico, irreducible sobre $\mathbb{Q}[X]$, de grado $n \geq 2$ y tal que
$$X^n f(X^{-1}) = f(X).$$
Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de f y sea $K = \mathbb{Q}(\alpha + \alpha^{-1})$.
   (a) Demuestre que $[\mathbb{Q}(\alpha) : K] \leq 2$.
   (b) Demuestre que $[\mathbb{Q}(\alpha) : K] = 2$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

10 de agosto de 2015

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea $E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}$ la base habitual del espacio $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, de manera que exactamente un coeficiente de $E_{i,j}$ es no nulo, y el coeficiente no nule es igual a 1. Sea $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ definida por $T(E_{i,j}) = E_{i-1,j+1}$, donde los subíndices se entienden módulo n. Es decir

$$T(E_{i,j}) = \begin{cases} E_{i-1,j+1} & \text{si } i \neq 1,\ j \neq n, \\ E_{n,j+1} & \text{si } i = 1,\ j \neq n, \\ E_{i-1,1} & \text{si } i \neq 1,\ j = n, \\ E_{n,1} & \text{si } i = 1,\ j = n. \end{cases}$$

   Encuentre la forma de Jordan de T y demuestre su respuesta.

2. Sea W un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo de característica 0. Suponga que $S : W \to W$ es lineal y que la traza $\operatorname{tr}(S^\ell) = 0$ for todo $\ell \in \mathbb{N}$. Demuestre que S es nilpotente (es decir, $S^N = 0$ para algún $N \in \mathbb{N}$).

Sección II: Teoría de grupos.

1. ¿A qué grupo abstracto es isomorfo un 2-subgrupo de Sylow del grupo simétrico S_7?

2. Sea G un grupo finito, sea N un subgrupo normal de G, y sea p un número primo que *no* divide al orden $|G|$ de G. Sea X el conjunto de p-tuplas $(g_1, \ldots, g_p)$ de elementos de G que satisfacen las condiciones

$$g_1 g_2 \cdots g_p \in N, \qquad g_p g_{p-1} \cdots g_1 \in N.$$

   Demuestre que p divide al entero $|X| - |N|$.

Sección III: Teoría de anillos.

1. Sea A el anillo de todas las funciones infinitamente diferenciables de $\mathbb{R}$ en sí mismo. Sea $I_0 \subset A$ el subconjunto formado por todas aquellas funciones que se anulan en 0. Más generalmente, sea $I_n \subset A$ subconjunto formado por todas aquellas funciones cuyas primeras n derivadas se anulan en 0. Así $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_0 \subset A$ para todo para $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Demuestre que I_n es un ideal de A para todo n.

   (b) Demuestre que I_n/I_{n+1} e I_{n+1}/I_{n+2} son isomorfos como A-módulos para todo n.

2. Sea $A = \mathbb{R}[x, y]$ el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes reales. Encuentre un A-módulo finitamente generado que *no* sea isomorfo a una suma directa finita de A-módulos cíclicos.

   Nota. Un módulo es cíclico si puede ser generado por un elemento.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Sea p un número primo impar y sea $L = k(\eta)$ una extensión del cuerpo k, con η una raíz primitiva de la unidad de orden p^2. Suponga que $[L : k] = p$. ¿Puede concluir que k contiene una raíz primitiva de la unidad de orden p? Dé una demostración o un contraejemplo.

2. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$ un polinomio mónico de grado tres sin raíz en $\mathbb{Q}$. Sean α_1, α_2, y α_3 las tres raíces de f en $\mathbb{C}$. Demuestre que $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}] = 3$ si y sólo si el discriminante de f es un cuadrado en $\mathbb{Q}$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

11 de enero de 2016

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea $\mathbb{F}_4$ el cuerpo de cuatro elementos y sea $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_4)$ el grupo de matrices invertibles de tamaño 2×2 con coeficientes en $\mathbb{F}_4$.

   (a) Encuentre la cardinalidad de G. Demuestre su respuesta.

   (b) Demuestre que G actúa transitivamente sobre un conjunto de 5 elementos.

   Nota. Por definición, un grupo G actúa transitivamente sobre un conjunto X ssi para cualquier par x, $x' \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = x'$.

2. Sea K un cuerpo y sean $A \subseteq B$ dos K-álgebras de dimensión finita. Sea $T \in A$ un elemento que es invertible en B. Demuestre que T es invertible en A.

   Nota. Por definición, una K-álgebra es un anillo con unidad que contiene a K en su centro.

Sección II: Teoría de grupos.

1. Describa (salvo isomorfismo) todos los grupos de orden $5 \cdot 13 \cdot 31$. Demuestre su respuesta.

2. Sea p primo y sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito de característica p. Determine las clases de conjugación de todos los elementos de orden p en el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$.

Sección III: Teoría de anillos.

1. Sea p un número primo y sea $\alpha \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{p}\,\big]$ un elemento no invertible en $\mathbb{Z}\big[\sqrt{p}\,\big]$. Demuestre que α tiene factorización como producto de elementos irreducibles en $\mathbb{Z}\big[\sqrt{p}\,\big]$.

2. Sea A un anillo Noetheriano y sea N un A-módulo finitamente generado. Suponga que $f : N \to N$ es un A-homomorfismo epiyectivo. Demuestre que f es inyectivo.

   Sugerencia. Considere $\ker(f^n)$.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ sin raíces múltiples en $\mathbb{C}$. Sea $E \subset \mathbb{C}$ el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$, y suponga que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \simeq S_n$, el grupo de permutaciones de n objetos.

   (a) Demuestre que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $f(x)$. Demuestre que la identidad es el único automorfismo del cuerpo $\mathbb{Q}(\alpha)$.

2. Sea $f(x) := x^9 - 2$.

   (a) Encuentre el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Demuestre su respuesta.

   (b) Encuentre el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre los cuerpos finitos $\mathbb{F}_5$ y $\mathbb{F}_7$. Demuestre su respuesta.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

9 de enero de 2017

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea F un cuerpo, sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Un vector $v \in V$ se dice cíclico para T si $\{v, T(v), T^2(v), \dots\}$ genera V. Suponga que todo $v \in V$, $v \neq 0$, es un vector cíclico para T. Demuestre que el polinomio característico de T es irreducible sobre F.

2. Sean A y B dos matrices no nulas, de tamaño $n \times n$, con coeficientes en algún cuerpo F, y tales que $AB = BA$. Suponga que el polinomio característico de A no tiene raíces múltiples (en ninguna extensión de F). Demuestre que el polinomio minimal de B no tiene raices múltiples.

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea G el grupo dihedral de orden $2n$. Sea p un primo impar que divide a $2n$. Demuestre que G contiene un único p-subgrupo de Sylow.

2. Sea G un grupo finito y sea $H \subsetneq G$ un subgrupo de G, distinto de G. Demuestre que
$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G.$$

Sección III: Teoría de anillos.

1. Demuestre que el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales no es el cuerpo de cocientes de un DFU. Más precisamente, suponga que $\mathbb{R}$ es isomorfo al cuerpo de cocientes de algún dominio de factorización única D. Demuestre que D es isomorfo a $\mathbb{R}$.

2. Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $M \subset A$ un ideal maximal y principal de A. Demuestre que no existe un ideal I de A tal que $M^2 \subsetneq I \subsetneq M$.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos y sea

$$g(y) := y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \in \mathbb{F}_q[y].$$

   (a) Demuestre que si g tiene raíz en $\mathbb{F}_q$, entonces g se factoriza en $\mathbb{F}_q[y]$ como producto de 4 factores de grado 1. Demuestre que esto sucede si y sólo si

$$q \equiv 0 \text{ (módulo 5)}, \qquad \text{o bien} \qquad q \equiv 1 \text{ (módulo 5)}.$$

   (b) Suponga que en $\mathbb{F}_q[y]$ el polinomio g tiene un factor $h(y)$ irreducible y mónico de grado 2. Demuestre que $h(0) = 1$.

2. Sea F un cuerpo y $g \in F[x]$ un polinomio irreducible y mónico. Suponga que en alguna extensión de F el polinomio g tiene una raíz α y otra raíz $\alpha + 1$. Demuestre que F es de característica finita.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ÁLGEBRA

24 de enero de 2020

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea $q \in \mathbb{N}$ y sea N una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $\det(N) \neq 0$. Demuestre que existe una matriz cuadrada M con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $M^q = N$.

2. Sea W un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F dotado de una forma F-bilineal $\langle\ ,\ \rangle : W \times W \to F$. Si $U \subset W$, definimos el subespacio vectorial
$$U^\perp = \big\{ v \in W \,\big|\, \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \big\}.$$
   (a) Sea U un subespacio vectorial de W. Demuestre que
$$\dim(U) + \dim(U^\perp) \geq \dim(W).$$
   (b) Suponga que U y V son subespacios vectoriales de W tales que $W = U + V$. Demuestre que si $W^\perp = \{0\}$, entonces
$$\dim(U^\perp) + \dim(V^\perp) \leq \dim(W).$$

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea $H \subset A_5$ un subgrupo del grupo alternante que actúa transitivamente sobre un conjunto S de 5 elementos. Es decir, dado cualquier par de elementos s_1 y s_2 de S, existe $\sigma \in H$ que envía s_1 a s_2. Demuestre que H es isomorfo a uno de los tres grupos siguientes: cíclico de 5 elementos, diedral de 10 elementos, o A_5.

2. Sean p y q números primos. Demuestre que todo grupo de orden p^2q es soluble.

Sección III: Teoría de anillos y módulos.

1. Sea R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$ y suponga que existe un entero fijo $n \geq 2$ tal que $x^n = x$ para todo $x \in R$. Demuestre que si $P \subset R$ es un ideal primo, entonces R/P es un cuerpo finito con a lo más n elementos.

2. Sea R un anillo conmutativo con 1, $I \subset R$ un ideal y $a \in R$ tales que los ideales
$$I + Ra, \qquad J = \{r \in R \big| \, ra \in I\}$$
son finitamente generados como R-módulos. Demuestre que I es finitamente generado como R-módulo.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Demuestre que no existe ningún cuerpo $L \subset \mathbb{C}$ que satisfaga las siguientes tres condiciones.
   (a) $L/\mathbb{Q}$ es una extensión galoisiana de grado 4.
   (b) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es un grupo cíclico
   (c) $i \in L$ (donde $i^2 = -1$).

2. Encuentre el grado $[L : \mathbb{Q}]$ y el grupo $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ del cuerpo de descomposición L sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{1999} x^i$.

Examen de Calificación Álgebra

11 de enero de 2022

Conteste CINCO preguntas, y al menos UNA de cada sección.

Sección I: Álgebra lineal.

1. Sea $A \in M_n(F)$ una matriz $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo F. Demuestre que existe una matriz $B \in M_n(F)$ tal que

   $$AB = 0, \qquad \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = n,$$

   donde rank denota el rango de la matriz.

2. ¿Cuántos subgrupos tiene el grupo $G := (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^n$? Demuestre su respuesta.

   Notación. Aquí $n \geq 1$ es un entero y el grupo G es el producto cartesiano de n copias del grupo cíclico de 6 elementos.

   Nota. Su fórmula puede no ser elegante, pero debe ser explícita (es decir, fácil de programar).

Sección II: Teoría de grupos.

1. Sea G un grupo de orden $168 = 3 \cdot 7 \cdot 8$ y sea P un 7-subgrupo de Sylow de G. Demuestre que o bien P es normal en G o el normalizador de P en G es un subgrupo maximal.

   Nota. Un subgrupo H de G es maximal si y sólo si $H \neq G$ y no existe ningún subgrupo K de G tal que $H \subsetneq K \subsetneq G$.

2. Demuestre que si G es un grupo finito no abeliano con centro $Z(G)$, entonces $|Z(G)| \leq |G|/4$.

   Notación. Aquí $|H|$ denota la cardinalidad de un grupo H.

Sección III: Teoría de anillos.

1. Sea R un dominio de ideales principales. Demuestre que si $(a) := aR$ es un ideal no nulo, entonces la cardinalidad del conjunto de los ideales B de R tales que $(a) \subset B$ es finita.

2. Sea R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Demuestre que si el conjunto de elementos no invertibles de R es cerrado bajo la suma, entonces R tiene un único ideal maximal.

Sección IV: Teoría de cuerpos.

1. Sea $F \subset \mathbb{C}$ un subcuerpo del cuerpo de los números complejos, y sea K el cuerpo que se obtiene al adjuntar a F todas las raíces (en $\mathbb{C}$) de todo polinomio no nulo con coeficientes en F. Demuestre que K es algebraicamente cerrado.

   Nota. Puede suponer que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

2. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado 4. Sea L su cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$, y sea $K := \mathbb{Q}(\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de f. Demuestre que si K contiene una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$, entonces $[L : \mathbb{Q}] < 12$.

EXAMEN DE CALIFICACION
ANALISIS

Agosto 2006

Haga CINCO de los siguientes siete problemas.

(1) Demuestre que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge a una función analítica de z en el dominio $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

(2) Sea (E, d) un espacio métrico completo y suponga que $h : E \to E$ es una función tal que $h^2 = h \circ h$ es contractiva, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d\big(h^2(x), h^2(y)\big) \le \alpha d(x, y) \qquad (\forall x, y \in E)\,.$$

Demuestre que existe un único $z \in E$ tal que $h(z) = z$.

(3) Calcule (justificando)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n \operatorname{sen}(x/n)}{x(1+x^2)}\, dx\,.$$

(4) Evalúe (justificando)

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\, dx\,,$$

donde $0 < \alpha < 2$.

Sugerencia: Comience por integrar por partes.

(5) Suponga que f es una función meromorfa en el disco abierto Δ_r de radio r, centrado en 0. Además suponga que $r > 1$, que $z = 1$ es el único polo de f dentro de Δ_r, y que este polo es simple. Dentro de Δ_1, sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ su expansión en serie de MacLaurin. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1\,.$$

(6) Sea $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ el conjunto de sucesiones $x = \{x_i\}$ de números reales tales que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty,$$

y sea $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ el conjunto de sucesiones acotadas $z = \{z_i\}$ de números reales.

Para $z = \{z_i\} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ y $x = \{z_i\} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$, pongamos

$$x \cdot z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i \, .$$

Demuestre que si $\alpha^{(k)} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ $(k = 1,\, 2,\, 3, \dots)$, y $\lim_{k\to\infty} \alpha^{(k)} \cdot y = 0$ para todo $y \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$, entonces $\lim_{k\to\infty} \|\alpha^{(k)}\|_1 = 0$. ¿Es cierto el recíproco?

(7) Suponga $f,\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Demuestre que

$$\big(f \star g\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

es una función continua y que

$$\lim_{|x|\to\infty} \big(f \star g\big)(x) = 0\, .$$

EXAMEN DE CALIFICACION
ANÁLISIS
16 de Agosto de 2007

Haga CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

1. Análisis Real

(1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, dx < \infty$. Demuestre que para todo $r \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+r) - f(x)|\, dx \leq C|r|\,,$$

para una constante C independiente de r.

(2) Sea $C \subset L^2([0,2\pi])$ el subespacio métrico de las funciones f tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{2ikx}$$

en la norma de $L^2([0,2\pi])$, donde $|a_k| \leq 1/(1+|k|))$. Demuestre que C es compacto.

(3) Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio vectorial real normado y sea $C \subset E$ un conjunto no vacío, convexo, cerrado en E. Suponga que la función $F : C \to C$ tiene imagen $F(C)$ compacta y cumple

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$$

para todo $x, y \in C$. Demuestre que F tiene al menos un punto fijo. *Sugerencia*: Considere para $x_0 \in C$ y $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n(x) = (1 - \frac{1}{n})F(x) + \frac{1}{n}x_0$.

(4) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible Lebesgue con medida de Lebesgue finita, sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe para casi todo $x \in A$ (en el sentido de medida de Lebesgue). Suponga además que existe un $p > 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_A |f_n(x)|^p\, dx < \alpha$ para todo n. Demuestre que $f_n \to f$ en $L^1(A, dx)$.

2. Análisis Complejo

(1) Calcule (justificando)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{1/4}(1+x)}\, dx\,.$$

(2) Demuestre que

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t+\mathrm{e}^z)}{1+t^2}\, dt$$

define una función analítica de z para todo $z \in \mathbb{C}$.

(3) Sea f una función meromorfa en todo el plano, no constante, analítica en $z=0$ y que satisface

$$f(z+1) = f(z), \qquad\qquad f(z+i) = f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ (a excepción de los posibles polos). Demuestre que la serie de MacLaurin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene un radio de convergencia $R \leq \sqrt{2}$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

18 de enero de 2008

Haga CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

1. Análisis Real

(1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable y sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su n-ésima derivada, es decir, $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ $(n \geq 1)$. Suponga que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que en todo intervalo cerrado y finito $I = [a, b]$ tenemos que $f_n(x) \to g(x)$ uniformente para $x \in I$. Demuestre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \alpha e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera. Es decir, $[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x] + 1$. Considere $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[kx]}{3^k}\,.$$

Demuestre que φ es integrable con respecto a la medida de Lebesgue y demuestre

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \frac{1}{8}\,.$$

(3) Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ definamos $Tf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\big(Tf\big)(x) = \int_0^1 f(x + y)\, dy\,. \qquad (*)$$

y sea $\|\ \|_2$ es la norma usual sobre $L^2(\mathbb{R})$.

(a) Demuestre que la integral $(*)$ converge, y que de hecho $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

(b) Demuestre para $f \in L^2(\mathbb{R})$ que

$$\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2\,,$$

con igualdad sólo si $f(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) "$S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por $Sf = f - Tf$ es epiyectivo." ¿Falso o verdadero? Demuestre su respuesta.

(4) Encuentre un subconjunto cerrado y no vacío de $L^2\big([0,1]\big)$ que no contenga un elemento de norma mínima.

2. Análisis complejo

(1) Sea $\Delta = \big\{z \in \mathbb{C} \big| \; |z| < 1\big\}$ el disco unitario abierto y sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) > 0$ para todo $z \in \Delta$. Demuestre

$$|f'(0)| \leq 2|f(0)|.$$

(2) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica que cumple $f(0) = 1$ y

$$|f(x + iy)| \leq \mathrm{e}^{xy}$$

para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$. Encuentre f.

(3) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que para todo $w \in \mathbb{C}$ la expansión de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,w}(z - w)^n$$

tiene al menos un coeficiente $A_{n,w}$ nulo. Demuestre que f es un polinomio.

EXAMEN DE CALIFICACION

ANALISIS

Agosto 2008

Haga CINCO de los siguientes siete problemas.

(1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable y tal que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}$$

la suma parcial de Fourier para f.

(a) Para $k \neq 0$ demuestre que

$$|c_k| \leq \frac{\alpha}{2\pi k^2}, \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \int_0^{2\pi} \big|f''(x)\big|\, dx\,.$$

(b) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \big|f(x) - s_n(x)\big|^2\, dx \leq \frac{\alpha^2 K}{n^3},$$

donde K no depende de f ni de n.

(2) Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ medible Lebesgue y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Para $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y acotada, definamos

$$h(k, x) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(ky)\, h(x - y)\, dy \qquad (k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n).$$

Demuestre que $\lim_{k\to\infty} h(k, x) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Empiece por demostrar

$$h(k, x) - h(x) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(ky)\big(h(x - y) - h(x)\big)\, dy\,.$$

(3) Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uniformemente continua.

(a) Demuestre que existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(b) Demuestre mediante un contraejemplo que no basta con asumir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ continua para concluir la existencia de $\tilde{f}$ continua.

(4) Suponga que $\mu \in L^1(\mathbb{R})$ satisface para casi todo $t \in \mathbb{R}$ la ecuación

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{-|t|} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-s|}\,\mu(s)\,ds\,. \qquad (*)$$

Encuentre una solución $\mu \in L^1(\mathbb{R})$ de $(*)$. ¿Existe otra solución $\mu \in L^1(\mathbb{R})$ de $(*)$?

Sugerencia: Calcule la transformada de Fourier de μ.

(5) Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/6}(x+2^6)} = \pi\,.$$

(6) Suponga que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera que satisface

$$\operatorname{sen}\big(\cos(f(z))\big) = \cos\big(\operatorname{sen}(f(z))\big)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

(7) Encuentre una biyección conforme explícita entre el semiplano superior y el conjunto

$$\big\{z \in \mathbb{C} \big|\, |z+1| < \sqrt{2},\ |z-1| < \sqrt{2}\big\}\,.$$

Copia incompleta del EXAMEN DE CALIFICACION
ANÁLISIS

Enero 2009

Haga CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

1. Análisis Real

(1) Sea $C\big([0,1]\big)$ el espacio vectorial real normado que consiste de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas sobre el intervalo cerrado $[0,1]$, provisto de la norma del supremo $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \big\{|f(x)|\big\}$. Demuestre que el subconjunto

$$\big\{g \in C\big([0,1]\big) \;\big|\; g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0,1]\big\}$$

es abierto en $C\big([0,1]\big)$.

(2) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto fijo que suponemos medible según Lebesgue y de medida de Lebesgue $m(A)$ finita. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = m\big(A \cap (-\infty, x]\big).$$

Demuestre que para todo real b, con $0 < b < m(A)$, existe $x_b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_b) = b$.

(3) Sea A el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con

$$\big|f(0)\big| \leq 2008, \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \big|f'(x)\big|^4 \, dx \leq 2009,$$

donde f' denota la derivada de f, entendida como función definida en casi todo punto de $[0,1]$. Demuestre que la clausura de A en $C\big([0,1]\big)$ es compacta, donde $C\big([0,1]\big)$ es como en el ejercicio 1.

(4) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto fijo de $\mathbb{C}$ y sea E el espacio vectorial complejo normado que consiste de todas las funciones analíticas $f : G \to \mathbb{C}$ tales que

$$\iint_G \big|f(x+iy)\big|^2 \, dxdy < \infty,$$

dotado del producto interno

$$< f, g > = \iint_G f(x+iy)\overline{g}(x+iy)\, dxdy,$$

donde $\overline{g}(x+iy)$ es la conjugada compleja de $g(x+iy)$. Demuestre que E es un espacio de Hilbert.

Sugerencia: Demuestre que si $z_0 \in G$ y B_r es un disco de radio $r > 0$, centrado en z_0 y contenido en G, entonces

$$\big(f(z_0)\big)^2 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} \big(f(x+iy)\big)^2\, dxdy.$$

2. Análisis Complejo

(1) Calcule (justificando)

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{sen}(x)}{(1+x^2)(4+x^2)}\, dx\,.$$

(2)

(3)

EXAMEN DE CALIFICACION
ANÁLISIS

19 de agosto, 2009

Haga CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

I. Análisis Real

(1) Encuentre un subconjunto $\Delta \subset (0,1)$, con Δ abierto y denso en el intervalo $(0,1)$ y de medida de Lebesgue $m(\Delta) < 1$. Demuestre que Δ tiene las propiedades requeridas.

(2) Demuestre (sin citar teoremas de análisis de Fourier) que para todo conjunto medible-Lebesgue $A \subset [-\pi, \pi]$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \operatorname{sen}(nt)\, dt = 0\,.$$

(3) Sea X el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) normado que consiste de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, dt}\,.$$

Sea Y el mismo espacio vectorial, pero con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \big\{|f(t)|\big\}\,.$$

Demuestre que

(a) La función identidad $I : X \to Y$ no es continua.

(b) La función $T : X \to Y$ definida por

$$(T\,f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds \qquad\qquad \big(t \in [0,1]\big)$$

es continua. Encuentre la norma de T, es decir, encuentre $\displaystyle\sup_{f\in X,\ \|f\|_2=1} \big\{\|f\|_\infty\big\}$.

(4) Sea X un espacio de Banach (sobre $\mathbb{R}$) con norma $\|\ \|$ y sea $B(X)$ el espacio de Banach de todas las funciones $T : X \to X$ lineales y continuas, dotado de la norma

$$\|T\|_{B(X)} = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} \big\{\|T(x)\|\big\}\,.$$

Sean S y T elementos de $B(X)$, con T invertible en $B(X)$ $\big($es decir, T^{-1} existe y $T^{-1} \in B(X)\big)$ y

$$\|T - S\|_{B(X)} < \frac{1}{\|T^{-1}\|_{B(X)}}\,.$$

Demuestre que S es invertible en $B(X)$. Concluya que el conjunto de funciones invertibles en $B(X)$ es abierto.

II. Variable Compleja

(1) Calcule (justificando)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{5 - 4\mathrm{sen}(x)}\, dx.$$

(2) Sea $G \subset C$ un subconjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.

(a) Demuestre que si $f : G \to \mathbb{C}$ es una función analítica con $|f|$ constante, entonces f es constante.

(b) Demuestre que la aseveración anterior puede ser falsa si cambiamos "analítica" por "continua".

(3) Para todo $a \in \mathbb{R}$ evalúe (justificando)

$$\int_0^{\pi} \tan(x + ia)\, dx\,.$$

EXAMEN DE CALIFICACION
ANÁLISIS
18 de diciembre, 2009

Haga CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

1. Análisis Real

(1) Sea $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función con derivada h' continua en $(0,\infty)$ y tal que $\lim_{x\to\infty} h'(x) = 1$. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$

NOTA. NO cite a l'Hôpital. Este es un ejercicio de cálculo elemental, pero riguroso.

(2) Sea $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ una función no-negativa, integrable Lebesgue, y sea $\nu = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx < \infty$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\Big(1 + \big(g(x)/n\big)^{\alpha}\Big)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1, \\ \nu & \text{si } \alpha = 1, \\ \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

(3) Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, medible Lebesgue, invariante por traslación por todo racional α. Es decir, si fijamos cualquier $\alpha \in \mathbb{Q}$, tenemos

$$F = \big\{ f + \alpha \big| \, f \in F \big\}.$$

Demuestre que ya sea F es de medida 0, o su complemento $\mathbb{R} - F$ es de medida 0.

(4) Sea $D = \big\{ z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1 \big\}$ el disco unitario abierto y sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que

$$\|f\|_2 = \left(\iint_D |f(z)|^2\,dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

donde dm es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Demuestre

$$|f(z)| \le \frac{C}{\sqrt{1-|z|^2}} \|f\|_2$$

para alguna constante C que no depende de f.
Sugerencia: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

2. Análisis complejo

(1) Definamos $g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$.

(a) Demuestre que g es una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$.

(b) Demuestre que $\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = g(z) + h(z)$, con h una función analítica en todo $\mathbb{C}$.

(c) Demuestre que $g(z) = \dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$.

(2) Demuestre la convergencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{1-x^4}\, dx$ y calcule su valor. Justifique todos sus pasos.

(3) Sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = \infty$. Demuestre que h es un polinomio.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

17 de Enero, 2011

Responda CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

1. Análisis Real

(1) Sea M un espacio métrico que contiene un subconjunto numerable E, denso en M, y sea $S \subset M$ un subconjunto no vacío. Demuestre que existe un subconjunto numerable $B \subset S$, denso en S.

(2) Considere la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ n & \text{si } x = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j},\ x \notin \mathbb{Q},\ a_j \in \{0,1,...,9\},\ a_{n+1} \neq 0\,. \end{cases}$$

Pruebe que f es integrable Lebesgue pero no Riemann integrable. Encuentre $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3) Sean X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ con norma $|\cdot|$ y $T : X \to X$ una función lineal tal que

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\, |x|=1} \big\{|T(x)|\big\} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < \infty,$$

donde T^n denota la función T compuesta consigo misma n veces. Fijemos $\alpha \in X$ y definamos $S : X \to X$ por $S(x) = \alpha + T(x)$. Encuentre un punto fijo de S y demuestre que este punto fijo es único.

(4) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Sea μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Suponga que $E \subset [0,1]$ es un subconjunto Lebesgue medible con $\mu(E) = 0$. Demuestre que $f(E) \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto Lebesgue medible y $\mu\big(f(E)\big) = 0$.

2. Análisis Complejo

(1) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y simplemente conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demuestre que existe una función analítica $h : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \mathrm{e}^{h(z)}$.

(2) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ la intersección de dos discos,

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1| < 1,\ \ |z-i| < 1 \right\}.$$

Describa una aplicación conforme $f : \Omega \to \Delta$ que sea una biyección entre Ω y el disco unitario $\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$.

NOTA. Puede dar su respuesta como composición $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$, donde cada f_i es una aplicación explícita.

(3) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función meromorfa con un único polo simple en $z = z_0$, con residuo $\kappa \neq 0$. Suponga además que $z_0 \neq 0$ y que Ω contiene el disco cerrado centrado en el origen con radio $|z_0|$. Por lo tanto para $|z| < |z_0|$ tenemos una expansión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} = z_0.$$

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

14 de marzo, 2011

Responda CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

I. Análisis Real

(1) Sea $1 < p < \infty$ y $f \in L^p\big([0,+\infty), dt\big)$, donde dt es la medida de Lebesgue. Demuestre
$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1+\frac{1}{p}} \int_0^x f(t)\, dt = 0.$$
Sugerencia. Considere primero f con soporte compacto.

(2) Sea H un espacio de Hilbert real con producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y norma $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Suponga que $\alpha_n \in H$, $\|\alpha_n\| = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y
$$\lim_{n \to \infty} \langle \alpha_n, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$
para todo $\beta \in H$.

(a) Demuestre que $\|\alpha\| \leq 1$.

(b) Encuentre un ejemplo donde $\alpha = 0$.

(3) Sean E, F y G tres espacios normados reales y sea $\phi : E \times F \to G$ una función bilineal. Demuestre que ϕ es continua si y sólo si existe $C \in (0, \infty)$ tal que
$$\|\phi(x,y)\|_G \leq C\, \|x\|_E\, \|y\|_F, \qquad \forall\, x \in E,\, y \in F.$$
Sugerencia. Imite la demostración del caso lineal.

(4) Sea $f_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles-Lebesgue. Demuestre que el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe es un conjunto medible-Lebesgue.

II. AnálisisComplejo

(1) Demuestre que

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{t\,\mathrm{sen}(z)}}{1+t}\,dt$$

es una función analítica en $\mathbb{C}$.

(2) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ evalúe (justificando)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(\alpha x)}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,dx.$$

(3) Sea f una función analítica, no constante, en el disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ tal que para $r \in (0,1)$ se cumple

$$f(r) = \sup_{|z|=r} \{|f(z)|\}.$$

(a) Demuestre que f restringida al intervalo $(0,1)$ es real y estrictamente creciente.

(b) Si además $f(0) = 0$, demuestre $f'(r) \geq f(r)/r$ para $r \in (0,1)$, con igualdad si y sólo si $f(z) = cz$ para algún $c > 0$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

22 de Julio, 2011

Responda CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

I. Análisis Real

(1) Sea l^1 el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ que consiste de todas las sucesiones $x = \big(x(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$, con $x(j) \in \mathbb{C}$, tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)| < \infty$. La norma $\|x\| := \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|$ hace de l^1 un espacio normado. Sea

$$F := \left\{ x \in l^1 \,\middle|\, x(j) \neq 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) ¿Es F cerrado? Demuestre su respuesta.

(b) ¿Es F abierto? Demuestre su respuesta.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función medible tal que $0 < \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$. Evalúe (justificando) para $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right)\,dx.$$

(3) (a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que existe $\ell > 0$ con la propiedad $A \cap (x, x+\ell) = \varnothing$ para todo $x \in A$. Demuestre que A es un conjunto numerable (o finito).

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida de Lebesgue 0.

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int_{\mathbb{R}} |x|^{\alpha} \cdot |f(x)|\,dx < \infty$ para todo $\alpha \geq 0$. Definamos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx} f(t)\,dt.$$

Demuestre que F es infinitamente diferenciable.

II. Análisis Complejo

(1) Para $n \in \mathbb{N}$, evalúe

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx.$$

(2) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica que cumple $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) \geq \mathrm{Im}\big(f(z)\big)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

(3) Sea X un espacio topológico compacto, μ una medida de Borel finita, positiva y sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Supongamos que $H : D \times X \to \mathbb{C}$ es continua y que para todo $x \in X$, la función $s \mapsto H(s,x)$ es analítica en D. Demuestre que la función $g : D \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(s) = \int_X H(s,x)\,d\mu(x)$$

es analítica en D.

SUGERENCIA. Piense en $\int_\gamma g(s)\,ds$, donde γ es un camino cerrado.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

26 de Marzo, 2012

Responda CINCO de los siguientes siete problemas, haciendo al menos dos de cada sección.

I. Análisis Real

(1) Demuestre que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\cos\big(\sin(t)\big) > \frac{1 + \big(\cos(t)\big)^2}{1}$$

para todo t con $0 < t < \epsilon$.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que $\big\{\big(x, f(x)\big)\,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^2$ de medida 0.

(3) Para $A \subset (0, \infty)$, definamos

$$\sum_{a \in A} a = \sup_{B} \Bigg\{ \sum_{b \in B} b \Bigg\},$$

donde B recorre los subconjuntos finitos de A. Demuestre que si A no es enumerable, entonces $\displaystyle\sum_{a \in A} a = \infty$.

(4) Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función medible-Lebesgue con

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \big\{ |\psi(x)| \big\} < \infty.$$

Para $t \in \mathbb{R}$, definamos $\psi_t(x) = \psi(x - t)$ y supongamos

$$\lim_{t \to 0} \|\psi_t - \psi\|_\infty = 0.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - t)\, r_n(t)\, dt,$$

donde

$$r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/(2n), \\ n & \text{si } |x| < 1/(2n). \end{cases}$$

(a) Demuestre que $g_n(x) \to \psi(x)$ c.t.p. (es decir, excepto posiblemente para x en un conjunto de medida de Lebesgue nula).

(b) Demuestre que $\{g_n\}_n$ es una familia equicontinua (defina esto primero).

(c) Demuestre que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uniformemente continua y tal que $g(x) = \psi(x)$ c.t.p.

II. AnálisisComplejo

(1) (a) Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y suponga que $g(z) \neq 0$ para todo z que cumple $|z| \leq 1$. Demuestre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left(|g(0)/g(\mathrm{e}^{i\theta})|\right) d\theta = 0.$$

(b) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ todos los ceros de f con $|a_k| < 1$ (repetidos si son múltiples). Suponga que $f(z) \neq 0$ si $|z| = 1$. Demuestre

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left(|f(0)/f(\mathrm{e}^{i\theta})|\right) d\theta.$$

(2) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y no vacío, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica y tal que para dos puntos distintos $a, b \in \Omega$ tenemos $f(a) = 0 = f(b)$. Demuestre que f restringida a $\Omega - \{a, b\}$ no es inyectiva.

Sugerencia. Piense en f en una vecindad de a y en una vecindad de b.

(3) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y no vacío. Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $H(\Omega)$ de las funciones analíticas $f : \Omega \to \mathbb{C}$, y sea $H^2(\Omega)$ el subespacio vectorial de $H(\Omega)$ cuyos elementos f satisfacen

$$\int\int_\Omega |f(x+iy)|^2 dx\, dy < \infty.$$

Sobre $H^2(\Omega)$ definimos el producto escalar

$$(f, g) = \int\int_\Omega f(x+iy)\, \overline{g(x+iy)}\, dx\, dy.$$

(a) Para $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in [0, \infty)$ sea $\bar{\mathcal{B}}(z_0, r) = \big\{z \in \mathbb{C} \big| \, |z - z_0| < r\big\}$. Demuestre que si $f \in H(\Omega)$ y $\bar{\mathcal{B}}(z_0, r) \subset \Omega$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{\bar{\mathcal{B}}(z_0,r)} f(x+iy)\, dxdy.$$

Deduzca que si $f \in H^2(\Omega)$ entonces $|f(z_0)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma asociada al producto escalar.

(b) Si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces para todo $f \in H^2(\Omega)$ se tiene

$$\sup_{z \in K} \{|f(z)|\} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)} \|f\|,$$

donde para $A, B \subset \mathbb{C}$,

$$d(A, B) = \sup_{a \in A, b \in B} \{|a - b|\}.$$

(c) Demuestre que $H^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

8 de agosto, 2013

Responda a 3 problemas de la Sección 1 y a 2 problemas de la Sección 2.

I. Análisis Real

(1) Sea $T \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no denumerable y no finito. Demuestre que T tiene al menos un punto de acumulación en $\mathbb{R}$.

(2) Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ de dimensión denumerable, y denotemos su norma por $\| \ \|$. Suponga que hay una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de H que cumplen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n - e_n \|^2 < 1.$$

Demuestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera un subespacio denso de H.

(3) Sea $A := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid |a_n| \leq n^{-1}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ y sea

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,\ a_n \in \mathbb{C} \right\},$$

con la norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

(a) Demuestre que A es un subconjunto compacto de ℓ^2.

(b) Demuestre que A no es vecindad de ningún punto.

(4) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ una función integrable para la medida de Lebesgue, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y pongamos

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\, dt \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Demuestre que la integral tiene sentido y que G es diferenciable en casi todo punto.

II. AnálisisComplejo

(1) Calcule

$$\int_0^\infty \frac{\big(\log(t)\big)^2}{1+t^2}\,dt.$$

(2) Sea $\Lambda := \big\{z = m + ni \in \mathbb{C} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\big\}$, donde $i = \sqrt{-1}$, y pongamos

$$f(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \Big(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\Big) \qquad (z \in \mathbb{C},\ z \notin \Lambda).$$

(a) Demuestre que la serie es convergente y define una función f analítica en el dominio $\mathbb{C} - \Lambda$.

(b) Demuestre que f es meromorfa en $\mathbb{C}$.

(3) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica e inyectiva. Demuestre que existen a y b en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = az + b$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

1 de agosto, 2014

Resuelva tres problemas de la Sección I y dos de la sección II.

I. Análisis Real

(1) Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal y sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Demuestre que existe un subconjunto compacto $J \subset \mathbb{R}^n$ y un subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$ que cumplen

$$L^{-1}(K) = J + W := \{ j + w \in \mathbb{R}^n \big| \, j \in J, \ w \in W \}.$$

Nota. Para evitar trivialidades, puede suponer que $L^{-1}(K) \neq \varnothing$.

(2) Sea $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable y $F = \nabla f$, con ∇ el operador gradiente. Demuestre que el sistema no tiene soluciones periódicas no triviales (es decir, demuestre que no existe una solución $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ no constante tal que para algún $\omega > 0$ se tiene $\mathbf{x}(t + \omega) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$).

(3) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y suponga que $\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$ para todo entero $n \geq 0$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

(4) Sea μ una medida sobre X, sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^1(X, \mu)$, y suponga que para todo $g \in L^\infty(\mu)$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu(x) = 0.$$

Demuestre que

$$\sup_n \left\{ \int_X |f_n(x)|\, d\mu(x) \right\} < \infty.$$

Sugerencia. Use que la función natural de $L^1(X,\mu)$ al dual de $L^\infty(X,\mu)$ no cambia la norma.

II. Análisis Complejo

(1) Sea $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| < r\}$ el disco abierto de radio r centrado en 0, y sea $f : \Delta_2 \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, no constante, tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Demuestre que f tiene al menos un cero en Δ_1.

(2) Evalúe las siguientes integrales. Demuestre su respuesta.

(a) $\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} + 2|\, d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta} + \frac{1}{2}\right| d\theta$

(3) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

(a) Demuestre que $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ también es holomorfa.

Nota. $\overline{z}$ denota la conjugada compleja de z.

(b) Suponga que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, y también que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo z en la recta $\{z \in \mathbb{C} \big| \operatorname{Im}(z) = 1\}$. Demuestre que existe un $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, tal que $f(z + \omega) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

6 de abril, 2015

Responda a 3 problemas de la Sección 1 y a 2 problemas de la Sección 2.

I. Análisis Real

(1) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y supongamos que $g(y) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Demuestre que la ecuación

$$\int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

define una función $y = \varphi(x)$ para x en una vecindad de 0, que satisface $\varphi'(x) = \dfrac{f(x)}{g\big(\varphi(x)\big)}$, donde φ' denota la derivada.

(2) Demuestre que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \mathrm{d}t = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} t^n f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \text{para todo entero } n \geq 1.$$

(3) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un elemento de $L^2(\mathbb{R})$ y supongamos que tenemos una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $L^2(\mathbb{R})$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda función continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de soporte compacto. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

(4) Sea $p \geq 1$ y $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mu)$, donde μ la medida atómica que satisface $\mu(\{n\}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $S : \ell^p \to \ell^p$ el operador de traslación a la derecha definido por

$$S(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots)$$

y suponga que el operador lineal $T : \ell^p \to \ell^p$ satisface $TS = ST$. Demuestre que T es continuo.

II. AnálisisComplejo

(1) Sea

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+5)^z}.$$

Demuestre que f es analítica en el dominio $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

(2) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$.

(3) Para $r > 0$ pongamos $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$. Suponga que

$$f : \Delta_1 \to \mathbb{C}, \qquad g : \Delta_1 \to \mathbb{C}$$

son funciones analíticas tales que $g(\Delta_1) \subset f(\Delta_1)$, $f(0) = g(0)$ y f es inyectiva.

(a) Demuestre que $g(\Delta_r) \subset f(\Delta_r)$ para todo $0 < r < 1$.

(b) Demuestre que $|g'(0)| \leq |f'(0)|$.

(c) Si $|g'(0)| = |f'(0)|$ entonces $g(\Delta_1) = f(\Delta_1)$. ¿Puede decirse algo más de la relación existente entre f y g en este caso?

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

10 de agosto, 2015

Haga tres problemas de la Sección 1 y dos problemas de la Sección 2.

1. Análisis Real

(1) 1t Sea μ una medida definida sobre la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ tal que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ definamos

$$\psi(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\alpha x}\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad\qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Suponga que existe $\alpha \neq 0$ tal que $\psi(\alpha) = 1$. ¿Qué puede concluir sobre μ?

(2) Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ que consiste de todas las funciones $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| < \infty$. Sean

$$\|\, a \,\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| \qquad \text{y} \qquad \|\, a \,\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ |a(n)| \big\}$$

dos normas sobre V. Encuentre un subconjunto compacto del espacio normado $(V, \|\cdot\|_\infty)$ que no sea compacto en $(V, \|\cdot\|_1)$.

(3) Sea (τ, ξ) un punto en $\mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$,

$$I := [\tau - \alpha, \tau + \alpha], \qquad J := [\xi - \alpha, \xi + \alpha], \qquad Q := I \times J \subset \mathbb{R}^2.$$

Sea $f : Q \to \mathbb{R}$ continua, y suponga que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, tal que $\varphi_n(\tau) = \xi$, $\quad \varphi_n(t) \in J$ y

$$\big|\varphi_n'(t) - f\big(t, \varphi_n(t)\big)\big| \leq \frac{1}{n}$$

para todo $t \in I$. Demuestre que existe una subsucesión de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una solución φ de la ecuación integral

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}s \quad \text{para todo } t \in I.$$

(4) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean f, f_1, f_2, $\ldots$ funciones $\mathcal{A}$-medibles tales que f_n converge a f en $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y μ-casi en todas partes. Suponga además que $f_n(x) \geq 1$ para todo $x \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\int_\Omega f_n \log f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \log f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \log f \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

II. AnálisisComplejo

(1) Sea $A \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, donde $A := \left\{ z \middle| 1 \leq |z| \leq 3 \right\}$ y Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Suponga que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{si} \quad |z| = 1, \quad \text{y} \quad |f(z)| \leq 9 \quad \text{si} \quad |z| = 3.$$

Demuestre que $|f(z)| \leq 4$ si $|z| = 2$.

(2) Calcule la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$. Demuestre su respuesta.

(3) Sea $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el círculo unitario abierto, y suponga que $f : \Delta \to \Delta$ es analítica y tiene dos puntos fijos diferentes. Es decir, existen $p \in \Delta$ y $q \in \Delta$, $p \neq q$, tales que $f(p) = p$ y $f(q) = q$. Demuestre que $f(z) = z$ para todo $z \in \Delta$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN
ANÁLISIS

11 de abril, 2016

Resuelva 3 problemas de la Sección I y 2 problemas de la Sección II.

I. Análisis Real

(1) Sea $E = C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial cuyos elementos son todas las funciones continuas con dominio el intervalo cerrado $[0,1]$ y valores en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\|_\infty := \sup\limits_{0\le t\le 1} \{|f(t)|\}$. Sea $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ una función $\mathbb{R}$-lineal tal que:

$$\forall f \in E, \quad f(x) \ge 0 \ \forall x \in [0,1] \Longrightarrow \varphi(f) \ge 0.$$

Demuestre que φ es continua.

(2) Sean $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ y $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ dos sucesiones de números reales tales que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ converge absolutamente y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. Sea $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

Demuestre que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ converge.

(3) Sea $r > 1$ y considere el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{C})$ con producto escalar $\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y}_n$. Sea $T : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ el operador lineal definido por

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) := (r^{-1}x_2, r^{-2}x_3, \ldots, r^{-n}x_{n+1}, \ldots).$$

(a) Demuestre que T es continuo y calcule su norma como operador.
(b) Calcule explícitamente su operador adjunto T^*.
(c) Demuestre que T es compacto.

(4) Sea $E \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$, medible con respecto a la medida de Lebesgue μ, tal que

$$\mu(E \cap I) < \mu(I)$$

para todo intervalo abierto, acotado y no vacío I. ¿Se cumple necesariamente que $\mu(E) = 0$? Demuestre su respuesta.

II. Análisis Complejo

(1) Sea $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$ el disco unitario abierto. Suponga que $f : \Delta \to \mathbb{C}$ cumple que f^2 y f^3 son funciones analíticas en el dominio Δ. Demuestre que f también lo es.

(2) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}\, dx,$$

donde $\cosh(x) := (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$.

(3) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica.

(a) Suponga que existen números reales C y D y un entero $m \in \mathbb{N}$ tales que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple $|f(z)| < C|z|^m + D$. Demuestre que f es un polinomio.

(b) Suponga que existen polinomios $q_0(z), q_1(z), ..., q_n(z)$, no todos nulos, tales que que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\sum_{j=0}^{n} q_j(z)\big(f(z)\big)^j = 0.$$

Demuestre que f es un polinomio.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

13 de abril, 2018

Resuelva 3 problemas de la Sección I y 2 problemas de la Sección II.

I. Análisis Real

(1) Sea una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que no existe ningún punto $y \in \mathbb{R}$ con $f'(y) = 0 = f(y)$. Demuestre que es finito el conjunto

$$S := \big\{x \in [0,1] \,\big|\, f(x) = 0\big\}.$$

(2) Sea X un espacio de Banach con norma $\|\ \|$, sea Y un espacio vectorial normado con norma $|||\ |||$, y sea $T\colon X \to Y$ una función lineal continua. Suponga que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|||T(x)||| \geq c\|x\| \quad \text{para todo } x \in X.$$

Demuestre que $Z := T(X)$ es cerrado en Y y que $T^{-1} : Z \to X$ es una función continua (dándole a Z la topología inducida por la de Y).

(3) Considere una sucesión de funciones continuas $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen:

(i) $k_n(x) \geq 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} k_n(x)\, dx = 1$,

(iii) dados $\varepsilon, \eta > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$ se tiene

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x)\, dx < \varepsilon.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada.

(a) Demuestre que las funciones $f_n(x) := \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s) f(s)\, ds$ están bien definidas.

(b) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

(4) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, $\| \ \|$ la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$ y dx la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

(a) Demuestre que la función

$$x \mapsto f(x) := \inf_{k \in K} \{\|x - k\|\}$$

es continua y cumple $f(x) = 0$ si y solo si $x \in K$.

(b) Para $x \in \mathbb{R}^n$, sea $g(x) := \max(1 - f(x), 0)$. Demuestre que

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big(g(x)\big)^m \, dx = \int_K dx.$$

II. Análisis Complejo

(1) Sean $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $f : D \to D$ una función holomorfa tal que $0 = f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $|f(z)| \leq |z|^n$ para todo $z \in D$.

(2) Después de calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{z} \, dz$$

para cualquier número real a, donde $\gamma(t) := e^{it}, -\pi \leq t \leq \pi$, demuestre que

$$\int_0^\pi e^{a\cos(t)} \cos\big(a \sin(t)\big) \, dt = \pi.$$

¿Qué puede decir sobre $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos(t)} \cos\big(a \sin(t)\big) \, dt$ si $a \in \mathbb{C}$?

(3) Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que $f(1/n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Demuestre que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in (-1, 1)$.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

15 de abril, 2019

Resuelva tres problemas de la Sección I y dos de la Sección II.

I. Análisis Real

(1) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, sea

$$u_n = \left(\frac{1 + \cos(n\alpha)}{3 + \operatorname{sen}(n\alpha)} \right)^n.$$

Determine todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to \infty} u_n$ existe. Demuestre su respuesta.

(2) Para $y > 0$, sea

$$F(y) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy} \operatorname{sen}(x)}{x} \, dx.$$

Demuestre que la integral converge y que la derivada $F'(y)$ existe para todo $y > 0$.

(3) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado y sea $V \subsetneq E$ un subespacio vectorial propio de E. Demuestre que V no tiene puntos interiores.

(4) Sea X el $\mathbb{R}$-espacio de Banach que consiste de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f(0) = f(1)$, dotado de la norma del supremo. Suponga que $Y \subset X$ es un subespacio vectorial cerrado con la propiedad que cualquier elemento de $f \in Y$ es una suma finita $f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \operatorname{sen}(2\pi k_j x)$, donde $a_j \in \mathbb{R}$, $k_j \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ dependen de f. Demuestre que Y es de dimensión finita.

II. Análisis Complejo

(1) Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$ tales que

$$|f(z)| \leq |g(z)|$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = Cg(z)$.

(2) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}\, dx,$$

donde $\cosh(x) = (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})/2$.

(3) Sea $u_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones armónicas sobre $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que converge, uniformemente sobre subconjuntos compactos de D, a una función $u : D \to \mathbb{R}$. Demuestre que u es armónica.

EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

5 de abril, 2022

Resuelva tres problemas de la Sección I y dos de la Sección II.

I. Análisis Real

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que las siguientes afirmaciones con equivalentes:

a. $\lim_{t \to \pm\infty} |f(t)| = +\infty$.

b. Si $C \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces $f^{-1}(C)$ es compacto.

(b) Sea $X := C\big([-1,1]\big)$ el espacio vectorial real de todas las funciones continuas cuyo dominio es el intervalo $[-1,1]$ y valores en $\mathbb{R}$, dotado de la norma del supremo $\| \ \|_\infty$. Sea $T : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$T(f) := \int_0^1 f(s)\, ds - \int_{-1}^0 f(s)\, ds\,.$$

(i) Demuestre que T es uniformemente continua.

(ii) Calcule $\|T\| := \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \left\{ \dfrac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} \right\}$, y demuestre su respuesta.

(c) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto medible (Lebesgue) de $\mathbb{R}$ tal que $m(A) < \infty$, donde m es la medida de Lebesgue, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función no negativa y medible.

(i) Sea

$$A_n := \big\{x \in A : n \leq f(x) < n+1\big\}.$$

Demuestre que f es integrable sobre A si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} k m(A_k) < \infty$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$ y definamos

$$S(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon k m(B_{k,\varepsilon}), \quad \text{donde} \quad B_{k,\varepsilon} := \big\{x \in A : k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\big\}.$$

Demuestre que $\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon) = \int_A f(x)\, dm$.

(d) Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona y acotada de números reales, sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números reales, y para $n \geq 1$ pongamos $u_n := (\lambda_n - \lambda_{n+1})s_n$. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente.

II. Análisis Complejo

(a) Sea $n \geq 1$ un entero y sea $C \subset \mathbb{C}$ el círculo de radio 1 centrado en 0, recorrido contra las agujas del reloj.

(i) Calcule la integral de contorno $\displaystyle\int_C \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$.

(ii) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(\mathrm{sen}(x)\big)^n \, dx$.

(b) Para $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ y $\mathrm{sen}(1/z) \neq 0$, definamos

$$f(z) := \frac{1}{\mathrm{sen}(1/z)}.$$

(i) Determine si f es meromorfa en $\mathbb{C}$. Haga lo mismo para $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(ii) Calcule el residuo de f en cada polo.

Nota. Puede suponer que si $\mathrm{sen}(\alpha) = 0$, entonces $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función no constante y analítica, y sea $w \in \mathbb{C}$. Demuestre que existe una sucesión $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = w$.